TD 11 : Théorie des caractères

Les exercices marqués d'un seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Exercices importants

Exercice 1. (Rappels de cours)

Montrer que :

1. Une représentation (V, ρ) est irréductible si et seulement si $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

2. Deux représentations (V, ρ) et (V', ρ') sont isomorphes si et seulement si $\chi_V = \chi_{V'}$.

Exercice 2. (Représentation d'une action de groupe)

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On note $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_k$ les orbites de X sous l'action de G.

On définit la représentation associée à cette action de la manière suivante. On pose

$$V_X := \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C} e_x$$

et $g \in G$ agit sur V_X par

$$g \cdot \sum_{x \in X} a_x e_x := \sum_{x \in X} a_x e_{g \cdot x}.$$

1. Montrer que $\chi_{V_X}(g) = \#\{x \in X,\ g \cdot x = x\}$.

2. **(a)** Montrer que V_X^G est engendré par les $e_{\mathcal{O}_i} := \sum_{x \in \mathcal{O}_i} e_x$.

(b) En déduire que le nombre d'orbites de X est égal à $\dim \left(V_X^G \right)$.

On suppose que l'action de G est transitive. La représentation V_X se décompose donc en $\mathbb{1} \oplus H$, où H ne contient pas de sous-représentation isomorphe à la représentation triviale.

3. On fait agir G sur $X \times X$ de manière diagonale. Montrer que $\chi_{V_{X \times X}} = \chi_{V_X}^2$.

4. On dit que G *agit deux fois transitivement* si $\# X \geqslant 2$ et pour tous couples $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times X$, avec $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
Montrer que G agit deux fois transitivement si et seulement si l'action $G \curvearrowright X \times X$ a deux orbites.

5. Montrer que G agit deux fois transitivement si et seulement si $\langle \chi_{V_X}^2, \mathbb{1} \rangle = 2$, si et seulement si H est irréductible.

Applications :

6. On prend l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1, n]\!]$.

(a) Retrouver que V_X se décompose en une somme de deux représentations irréductibles $\mathbb{1} \oplus H$.

(b) Calculer le caractère de la représentation standard.

7. On prend l'action par translation de G sur lui-même. Calculer le caractère de la représentation régulière.

Exercice 3. (Tordue d'une représentation)

Soit G un groupe fini, soit (V, ρ) une représentation de G, et soit $\varepsilon : G \to \mathbb{C}^\times$ un caractère linéaire de G. On rappelle que la représentation V tordue par ε, notée $\varepsilon \otimes V$ est la représentation correspondant au morphisme

$$\varepsilon \otimes \rho : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ g & \longmapsto & \varepsilon(g)\rho(g) \end{array}.$$

1. Calculer le caractère de $\varepsilon \otimes V$.
2. En déduire que (V, ρ) est irréductible si et seulement si $(\varepsilon \otimes V, \varepsilon \otimes \rho)$ l'est.
3. Soit $G = \mathfrak{S}_3$, $V = H_3$ la représentation standard de $\mathfrak{S}_3$ et $\varepsilon : \mathfrak{S}_3 \to \mathbb{C}^\times$ la signature. Montrer que H_3 est isomorphe à $\varepsilon \otimes H_3$.

Exercice 4. (Critère utile)

Soit G un groupe fini possédant un sous-groupe abélien H d'indice m. Soit V une représentation irréductible de G.

1. Montrer que l'action de G sur V se restreint à une action de H sur V, et que celle-ci se décompose en sous-représentations irréductibles de degré 1 :
$$V \simeq V_1 \oplus \cdots \oplus V_r.$$
2. En considérant le sous-espace vectoriel $W := \sum_{g \in G} g \cdot V_1$, montrer que $\dim(V) \leqslant m$.

Exercice 5.

Soit $T_4 \subset \mathbb{R}^3$ un tétraèdre régulier centré en 0. On considère $\mathrm{Isom}(T_4) \subset O_3(\mathbb{R})$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ qui stabilisent T_4.

1. **(a)** Soit $u \in \mathrm{Isom}(T_4)$. Montrer que u envoie un sommet de T_4 sur un sommet de T_4.
   (b) En déduire un morphisme de $\phi : \mathrm{Isom}(T_4) \to \mathfrak{S}_4$ et montrer que ϕ est bijectif.
   (c) En déduire une représentation complexe (V, ρ) de degré 3 de $\mathfrak{S}_4$.
2. Calculer le caractère de (V, ρ).
3. Montrer que (V, ρ) est irréductible.
4. Montrer que (V, ρ) est isomorphe à la représentation standard de $\mathfrak{S}_4$.

Exercices supplémentaires

Exercice 6. (Composantes isotypiques – construction alternative)

Soit G un groupe fini. On note $\mathcal{I}_G$ l'ensemble des représentations irréductibles de G à isomorphisme près. Soit (V, ρ) une représentation de G.

Pour $W \in \mathcal{I}_G$, on pose

$$\pi_W := \frac{\dim(W)}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_W(g)}\rho(g) \in \mathrm{End}(V).$$

1. Montrer que π_W est un morphisme de représentations.
2. Soit $U \subset V$ une sous-représentation irréductible de V. Montrer que $\pi_W\big|_U = \lambda_U \mathrm{Id}$ avec
$$\lambda_U = \begin{cases} 1 & \text{si } U \cong W \ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. On pose $V_W := \mathrm{Vect}\,(U \subset V,\ \text{sous-représentation isomorphe à } W)$.
   Montrer que les $(V_W)_{W \in \mathcal{I}_G}$ sont des sous-représentations supplémentaires dans V.
4. Montrer que π_W est le projecteur sur V_W parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{W' \in \mathcal{I}_G,\ W' \ncong W} V_{W'}$.
5. Montrer enfin que V_W est isomorphe à une puissance de W.

Exercice 7. (Composantes isotypiques – applications)

Soit G un groupe fini.

1. Quelle est la représentation triviale-isotypique $V_{\mathbb{1}}$ d'une représentation (V, ρ) ?
2. Soient (V, ρ), (V', ρ') deux représentations de G. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$ un morphisme de représentations. Montrer que pour toute représentation irréductible W, on a $\varphi(V_W) \subset V'_W$ (on pourra utiliser l'exercice précédent).
3. Soit (V, ρ) une représentation de G dont toutes les composantes isotypiques non nulles sont irréductibles. Montrer que tout élément de $\mathrm{End}_G(V)$ est diagonalisable.

Exercice 8. (Supplémentaires G-stables)

Soit G un groupe fini et soit (V, ρ) une représentation complexe de G. Soit W une sous-représentation de V.

1. On suppose que W s'écrit comme somme directe de composantes isotypiques de V. Démontrer que W admet un unique supplémentaire G-stable.
2. On suppose maintenant que W ne s'écrit pas comme somme directe de composantes isotypiques de V.
   (a) Rappeler pourquoi W admet un supplémentaire G-stable, qu'on appellera S.
   (b) Démontrer qu'il existe une représentation irréductible de G qui est isomorphe à la fois à une sous-représentation de W et à une sous-représentation de S.
   (c) En déduire qu'il existe un morphisme de représentations non nul $f : S \to W$.
   (d) Conclure que W admet une infinité de supplémentaires G-stables. (On pourra considérer les morphismes de la forme $x \mapsto x + \lambda f(x)$ sur S.)

Exercice 9. (Représentation sur le carré symétrique et alterné)

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On définit le carré symétrique de V comme le quotient

$$\mathrm{Sym}^2(V) := V \otimes V / \mathrm{Vect}(x \otimes y - y \otimes x)_{x,y \in V},$$

et le carré alterné de V comme le quotient

$$\Lambda^2(V) := V \otimes V / \mathrm{Vect}(x \otimes x)_{x \in V}.$$

Pour x, $y \in V$, on note xy (*resp.* $x \wedge y$) l'image de $x \otimes y$ dans $\mathrm{Sym}^2(V)$ (*resp.* $\Lambda^2(V)$).

1. **(a)** Donner des bases et les dimensions de $\mathrm{Sym}^2(V)$ et $\Lambda^2(V)$.
   (b) Montrer que l'on a un isomorphisme canonique $V \otimes V \cong \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$.

Soit maintenant G un groupe fini, et (V, ρ) une représentation complexe de G, de caractère χ_V.

2. Montrer que l'isomorphisme $V \otimes V \cong \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$ induit des représentations de G sur $\mathrm{Sym}^2(V)$ et $\Lambda^2(V)$ telles que cet isomorphisme est un isomorphisme de représentations.
   On note $\rho_{\mathrm{Sym}^2(V)}$ et $\rho_{\Lambda^2(V)}$ les morphismes de groupes associés à ces représentations.
3. **(a)** Soit $g \in G$. Construire une base de vecteurs propres de $\rho_{\mathrm{Sym}^2(V)}(g)$ et $\rho_{\Lambda^2(V)}(g)$ en fonction d'une base de vecteurs propres de $\rho(g)$.
   (b) En déduire une expression des caractères $\chi_{\mathrm{Sym}^2(V)}(g)$ et $\chi_{\Lambda^2(V)}(g)$ en fonction de $\chi_V(g)$ et $\chi_V(g^2)$.